

NOTES DE COURS

**MODÉLISATION ET COMMANDE
DES SYSTÈMES MÉCATRONIQUES**

Préparé par

Pr. Alexandre GIRARD

Université de Sherbrooke



Université de
Sherbrooke

Dernière mise à jour le 18 septembre 2026

Préface

Ces notes sont un document en construction, pour le moment un recueil d'exercices et des listes de lecture de capsules vidéo.



Capsule vidéo

Série de capsules vidéo associées

<https://youtube.com/playlist?list=PL6adNeJ0A8UvgL6nwWegHk2nZ7XtjneDu>

Organisation de l'ouvrage

- **Chapitre 1** : boucle ouverte et boucle fermée, équations d'état, schémas blocs et fonctions de transfert.
- **Chapitre 2** : modélisation multi-physique à paramètres concentrés.
- **Chapitre 3** : réponses temporelle et fréquentielle, caractéristiques des systèmes.
- **Chapitre 4** : compensateurs une entrée une sortie.
- **Chapitre 5** : contrôlabilité, observabilité et régulateur linéaire quadratique.
- **Annexe A** : formulaire (fonctions de transfert, forme d'état) et formes canoniques.
- **Annexe B** : exercices numérotés $En.k$ et $Cn.k$.

Sources externes utiles



Livre — commande classique

Modern Control Systems [1]

Richard C. Dorf et Robert H. Bishop

<https://www.pearson.com/en-us/subject-catalog/p/modern-control-systems/P2000000003484/9780137307098>

Le manuel pour la performance, le diagramme de Bode, le lieu des racines et la conception fréquentielle.



Livre — forme d'état

Feedback Systems [2]

Karl J. Åström et Richard M. Murray

https://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki/Second_Edition.html

Une introduction en ligne à la forme d'état, au retour d'état et aux observateurs.



Vidéos — commande classique

Control Systems Lectures

Brian Douglas

<https://youtube.com/playlist?list=PLUMWjy5jgHK3j74Z5Tq6Tso1fSfVWZC8L>

Une série de capsules, en anglais, sur le diagramme de Bode, le lieu des racines et la conception fréquentielle.

**Vidéos — Matlab*****Série Matlab***

Brian Douglas

<https://youtube.com/playlist?list=PLn8PRpmsu08pQBgjxYFXSs0DEF3Jqmm-y>

La même matière, illustrée avec Matlab.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Architectures en boucle ouverte versus boucle fermée	5
1.2	Équations d'état	5
1.3	Schémas blocs et fonctions de transfert	6
2	Modélisation multi-physique	7
3	Analyse des systèmes dynamiques	8
4	Commande une entrée une sortie	9
5	Commande multi-variable	10
A	Aide-mémoire	11
A.1	Fonctions de transfert	11
A.1.1	Systèmes du premier ordre	12
A.1.2	Systèmes du deuxième ordre	12
A.1.3	Linéarisation d'une fonction scalaire	13
A.1.4	Position des pôles et stabilité	13
A.2	Espace d'état	13
A.2.1	Accessibilité, observabilité et retour d'état	14
A.2.2	Formes canoniques	15
B	Exercices	17
Chapitre 1		18
E1.1	— Boucle ouverte vs. boucle fermée	18
E2.1	— Régulation de la température d'une maison	19
Chapitre 2		20
E2.2	— Modélisation d'un monte charge hydraulique	20

E2.3 — Identification des paramètres électriques d'un moteur	21
E2.4 — Identification de la dynamique d'un joint robotique	22
Chapitre 3	23
E3.2 — Approximation de la réponse fréquentielle	23
E3.3 — Association de fonctions de transfert à leur réponse fréquentielle	24
Chapitre 4	25
E4.1 — Analyse des boucles fermées	25
E4.4 — Marge de phase	27
E4.1 — Analyse du lieu des racines	28
Chapitre 5	29
E5.1 — Boucle fermée multi-variable	29
E5.2 — Loi de commande optimale	29
E5.3 — Observabilité/contrôlabilité	29
C5.1 — Tutoriel NumPy	30
C5.3 — Chariot-pendulum-inversé avec la méthode LQR	30
C5.4 — Chariot-pendulum-inversé avec la méthode LQG	31

Chapitre 1

Introduction

1.1 Architectures en boucle ouverte versus boucle fermée

**Capsule vidéo***Systèmes asservis : boucle ouverte versus boucle fermée*<https://youtu.be/0VvwTo3nwrI>

1.2 Équations d'état

**Capsule vidéo***Modélisation dynamique : introduction aux équations d'état*<https://youtu.be/xRBZn4y8hYQ>**Capsule vidéo***Modélisation par équations d'état : exemple*<https://youtu.be/V8IqzaPcWWk>**Capsule vidéo***Linéarisation d'une fonction non-linéaire autour d'un point nominal*<https://youtu.be/2mdDMx31Hto>**Capsule vidéo***Linéarisation des équations d'états autour d'un point d'opération nominal*<https://youtu.be/R-wDJaxleTo>

**Capsule vidéo***Exemple de linéarisation + passage en fonction de transfert*<https://youtu.be/YsSCGWiHu9E>**Capsule vidéo***Systèmes asservis : révision des outils mathématiques*https://youtu.be/2iDdvM9Rx_Q

1.3 Schémas blocs et fonctions de transfert

**Capsule vidéo***Systèmes asservis : introduction aux schémas blocs*<https://youtu.be/Ep9LCqD0bP0>**Capsule vidéo***Fonctions de transfert : introduction (quand, quoi, pourquoi)*<https://youtu.be/HSwzzEUj0eM>**Capsule vidéo***Fonctions de transfert : fondements mathématiques*<https://youtu.be/Jv6k8q0k4rQ>**Capsule vidéo***Systèmes asservis : manipulation de schémas blocs pour obtenir une fonction de transfert*<https://youtu.be/acljcYujFFY>**Capsule vidéo***Approximation d'une fonction de transfert*<https://youtu.be/ZgiQgYgTksY>**Capsule vidéo***Approximation d'une fonction de transfert (v2024)*<https://youtu.be/Qdt1r8Zjg-8>

Chapitre 2

Modélisation multi-physique

**Capsule vidéo***Comment amorcer un problème de modélisation multi-physique*<https://youtu.be/itryPXbU0D0>**Capsule vidéo***Modélisation multi-physique : éléments dissipateurs, accumulateurs et inertiels*<https://youtu.be/3Zefgkz1Hlk>**Capsule vidéo***Exemple de modélisation multi-physique (électrique, mécanique et thermique)*<https://youtu.be/md2slBaVhaY>

Chapitre 3

Analyse des systèmes dynamiques

**Capsule vidéo***Espace des phases d'un système dynamique : introduction*<https://youtu.be/24y06psS5iM>**Capsule vidéo***L'espace des phases d'un système dynamique : stabilité et boucle fermée*<https://youtu.be/KXBhHSNjon0>**Capsule vidéo***Diagramme de Bode d'une fonction de transfert*https://youtu.be/j7EzVqJCC_I

Chapitre 4

Commande une entrée une sortie



Capsule vidéo
Commande PID : introduction
<https://youtu.be/6516e-gdx4Q>



Capsule vidéo
PID : fonction de transfert, pôles et zéros, et réponse fréquentielle
<https://youtu.be/wwjuUDEYyR8>



Capsule vidéo
Systèmes asservis : conception dans le domaine fréquentiel
<https://youtu.be/sNjn72Bzm8>



Capsule vidéo
Le PID : implémentation avec un pseudo-code, filtre et saturation.
<https://youtu.be/MBiz4X1uaQQ>

Chapitre 5

Commande multi-variable

**Capsule vidéo**

Contrôlabilité et observabilité d'une fonction de transfert et annulation de pôles et de zéros

<https://youtu.be/0nJ2cLoZPgY>

**Capsule vidéo**

Commande LQR : introduction

<https://youtu.be/IqNSKQG-WH8>

Aide-mémoire

A.1 Fonctions de transfert

Définition Une équation différentielle linéaire invariante d'ordre n ,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 u, \quad (\text{A.1})$$

correspond à la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (\text{A.2})$$

Pour une entrée $u(t) = U_0 e^{st}$, la solution s'écrit

$$y(t) = \underbrace{\sum_i C_i e^{s_i t}}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{G(s) U_0 e^{st}}_{\text{solution particulière}}. \quad (\text{A.3})$$

Boucle fermée La boucle standard à un degré de liberté se réduit à une seule fonction de transfert.

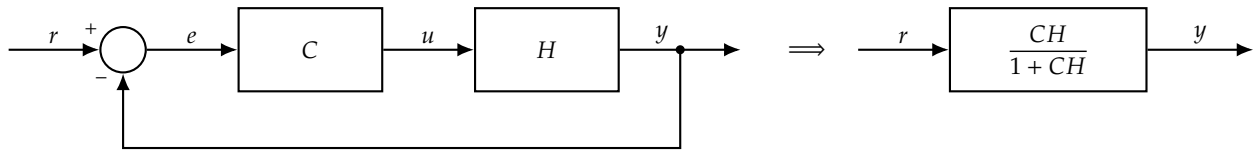


FIGURE A.1 – Réduction de la boucle standard.

Théorème de la valeur finale Pour une entrée échelon unitaire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) \quad \text{avec} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{et} \quad u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.1.1 Systèmes du premier ordre

$$\tau \dot{y} + y = g_0 u \quad \Longleftrightarrow \quad H(s) = g_0 \frac{1}{\tau s + 1} \quad (\text{A.5})$$

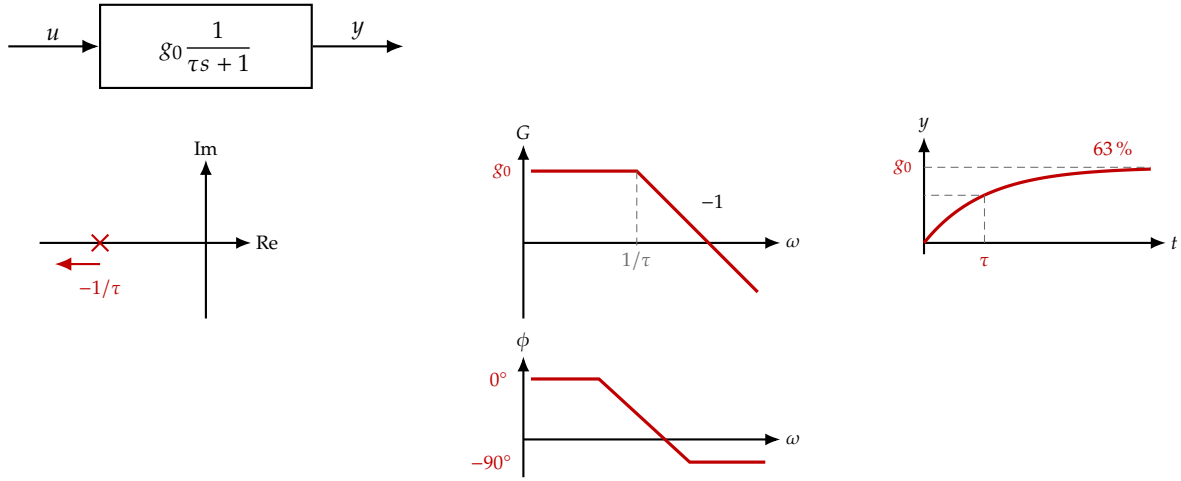


FIGURE A.2 – Premier ordre : bloc, pôle, diagramme de Bode et réponse à l'échelon.

A.1.2 Systèmes du deuxième ordre

$$\left[\frac{1}{\omega_n^2} \right] \ddot{y} + \left[\frac{2\zeta}{\omega_n} \right] \dot{y} + y = g_0 u \quad \Longleftrightarrow \quad H(s) = g_0 \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.6})$$

Les pôles s'écrivent

$$s = -\sigma \pm \omega_d i = \omega_n e^{(\theta + \pi/2)i}, \quad \sin \theta = \zeta, \quad \sigma = \zeta\omega_n, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (\text{A.7})$$

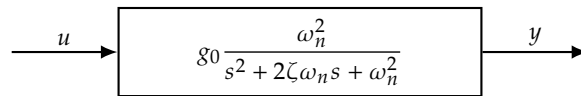


FIGURE A.3 – Bloc du second ordre.

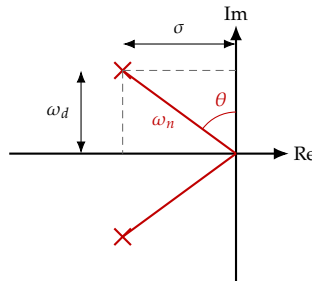
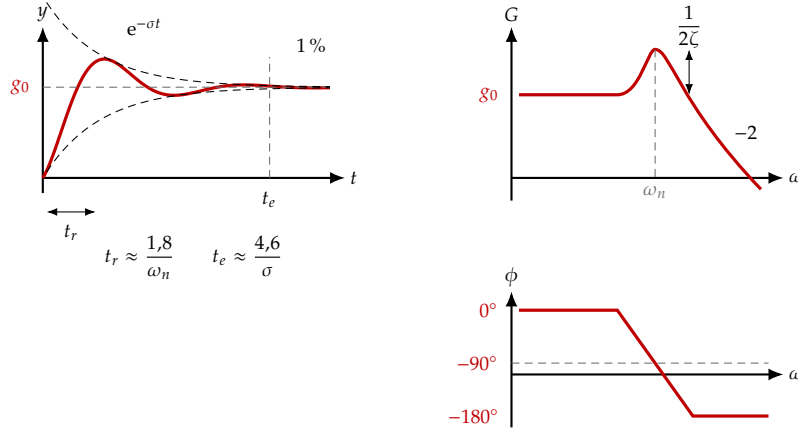


FIGURE A.4 – Géométrie des pôles complexes conjugués.

FIGURE A.5 – Deuxième ordre : réponse à l'échelon et diagramme de Bode. Rappel : $\text{dB} = 20 \log_{10}(G)$.

A.1.3 Linéarisation d'une fonction scalaire

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad y \approx f(\bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}} \delta x \quad \Rightarrow \quad \delta y = \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}} \right] \delta x \quad (\text{A.8})$$

A.1.4 Position des pôles et stabilité

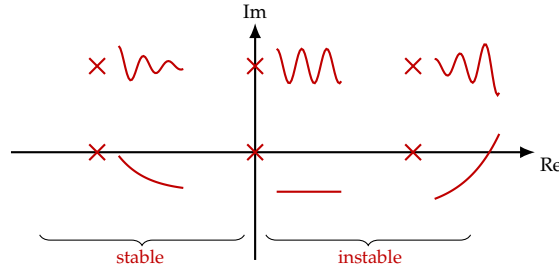


FIGURE A.6 – Lecture du plan complexe : un pôle à partie réelle positive rend le système instable.

A.2 Espace d'état

Linéarisation vectorielle En posant $x = x_0 + \delta x$ et $u = u_0 + \delta u$ autour d'un point nominal (x_0, u_0) :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\dot{x}_0}_{=0} + \delta \dot{x} \approx \underbrace{f(x_0, u_0)}_{=0} + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}}_A \delta x + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0}}_B \delta u \quad (\text{A.9})$$

$$\boxed{\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u} \quad y = h(x, u) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta y = C \delta x + D \delta u} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{array}{cccc} A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] & B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right] & C = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right] & D = \left[\frac{\partial h_i}{\partial u_j} \right] \\ n \times n & n \times m & \ell \times n & \ell \times m \end{array}$$

avec n le nombre d'états, m le nombre d'entrées et ℓ le nombre de sorties.

Réponse et modes Le changement de variable $x = Vz$ découple les équations :

$$\dot{x} = Ax \implies \dot{z} = \Lambda z \implies \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \dots, \dot{z}_n = \lambda_n z_n \quad (\text{un mode indépendant par ligne}) \quad (\text{A.11})$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{valeurs propres}) \quad V = [v_1 \dots v_n] \quad (\text{vecteurs propres}) \quad (\text{A.12})$$

$$Ax = \lambda x \implies \det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{pour trouver } \lambda_1 \dots \lambda_n, \quad Av_i = \lambda_i v_i \quad \text{pour trouver } v_i. \quad (\text{A.13})$$

A.2.1 Accessibilité, observabilité et retour d'état

Tests de rang

$$W_r = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

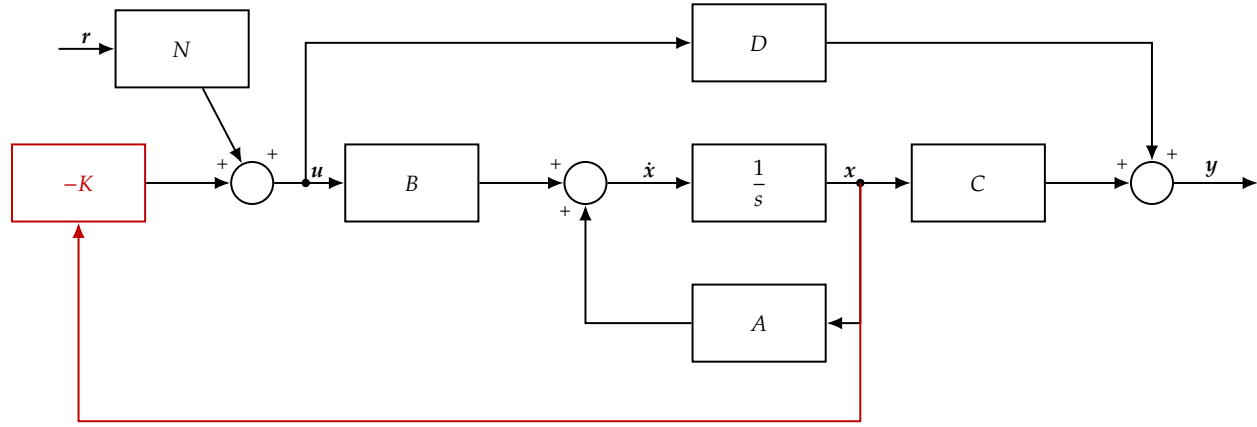
Les deux matrices doivent être de plein rang.

Passage à la fonction de transfert

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] u(s) \implies \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{[C][\text{adj}(sI - A)][B]}{\det(sI - A)} + [D] \quad (\text{A.15})$$

Rappel 2 × 2

Pour $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$: $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{bmatrix}$, $\det(A) = a_1 a_4 - a_2 a_3$, et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$.

FIGURE A.7 – Réalisation d'état et retour d'état $u = -Kx + Nr$.

Retour d'état

$$u = -Kx + Nr \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = \underbrace{[A - BK]}_{A_{cl}} x + \underbrace{[BN]}_{B_{cl}} r \quad (\text{A.17})$$

$$y = Cx + Du = \underbrace{[C - DK]}_{C_{cl}} x + \underbrace{[DN]}_{D_{cl}} r \quad (\text{A.18})$$

Pour $D = 0$ et $y_{ss} = r$,

$$N = -\left(C[A - BK]^{-1}B\right)^{-1}. \quad (\text{A.19})$$

A.2.2 Formes canoniques

Ces deux réalisations permettent de passer d'une $H(s)$ strictement propre à une forme d'état.

Pour

$$H(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0} + d_0, \quad (\text{A.20})$$

la forme canonique commandable s'écrit

$$A_{\text{cont}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_{\text{cont}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$C_{\text{cont}} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}], \quad D_{\text{cont}} = d_0, \quad (\text{A.22})$$

et la forme canonique observable

$$A_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

$$C_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{\text{obs}} = d_0. \quad (\text{A.24})$$

Chapitre B

Exercices

Chaque exercice porte un numéro permanent : $En.k$ pour un exercice à résoudre à la main, $Cn.k$ pour un exercice de code. Le numéro ne change pas si le chapitre qui couvre la matière est réorganisé.

Chapitre 1

E1.1 — Boucle ouverte vs. boucle fermée

Sujet : Les avantages des boucles fermées

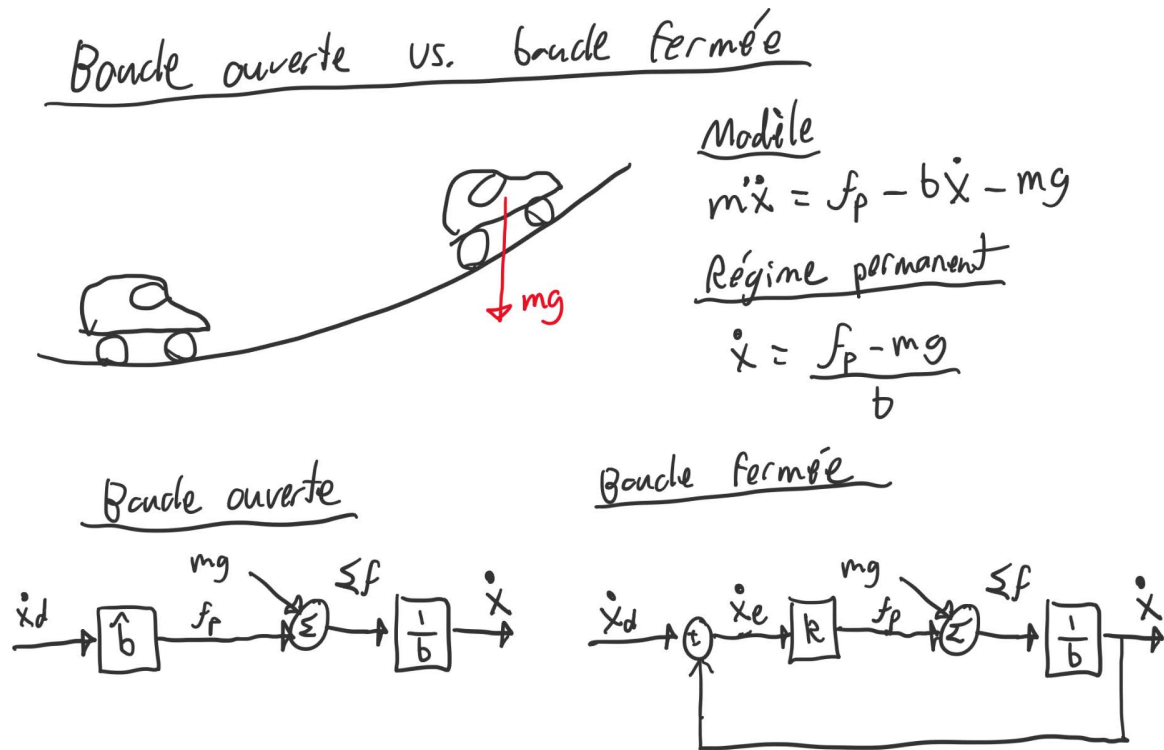


FIGURE B.1 – Boucle ouverte vs. boucle fermée

Données :

$$\text{Résistance au mouvement : } b = 10 \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Force de la gravité : } mg = 50 \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Consigne de vitesse désirée : } \dot{x}_d = 10 \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Résistance dans le modèle du contrôleur en boucle ouverte : } \hat{b} = 10 \quad (\text{B.4})$$

$$\text{Gain du contrôleur en boucle fermée : } k = 1000 \quad (\text{B.5})$$

Questions :

1. Trouvez la solution pour $\dot{x}$ dans les deux situations ;
2. Calculer le pourcentage d'erreur par rapport à la consigne et comparez les deux situations ;
3. Dans le cas où la vraie résistance au mouvement serait $b = 7$ et $mg = 0$, quel est l'impact sur la performance des deux contrôleurs ?

E2.1 — Régulation de la température d'une maison

Sujet : Les solutions temporelles des équations différentielles

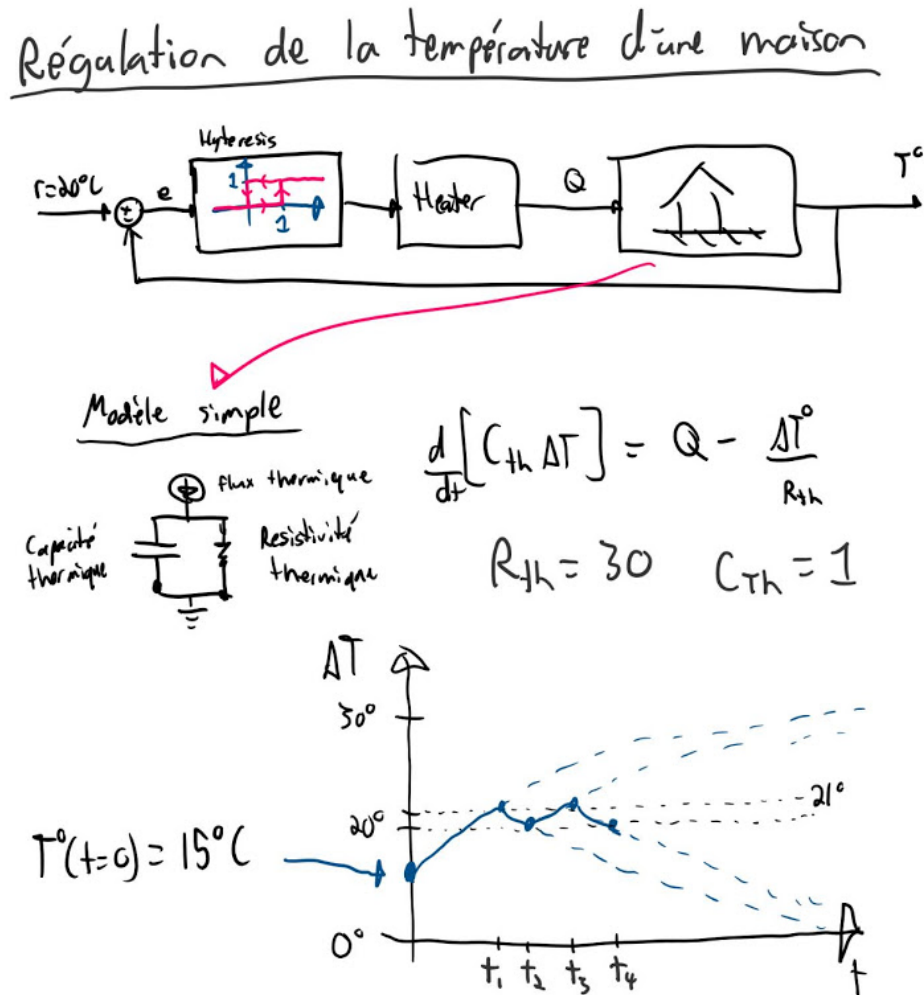


FIGURE B.2 – Régulation de la température d'une maison

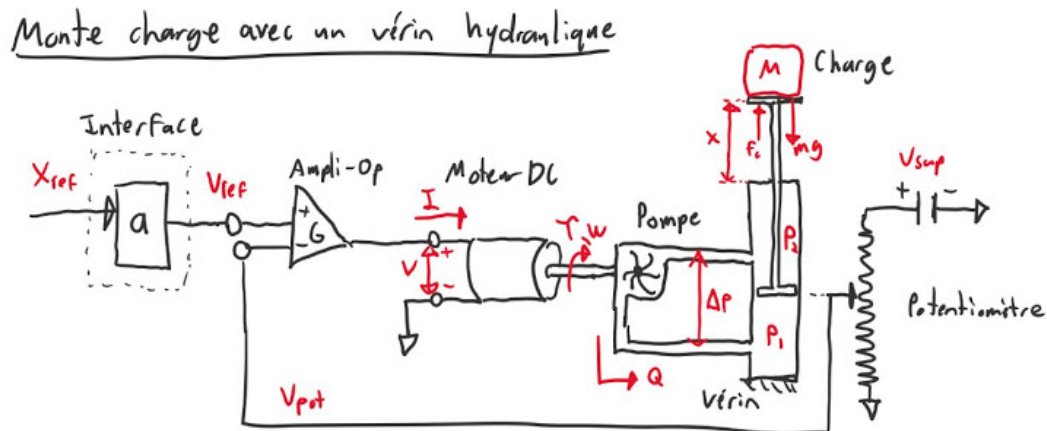
Questions :

1. Trouvez les solutions homogènes et particulière de cette équation
2. Trouvez les temps de switching t_1, t_2, t_3 , etc.

Chapitre 2

E2.2 — Modélisation d'un monte charge hydraulique

Sujet : Modélisation multi-physique et les schéma-bloc



Lois de comportement

→ Ampli-op

$$V_o = G [v^+ - v^-]$$

→ Moteur

$$V = RI + K_m w$$

$$\gamma = K_m I$$

→ Pompe

$$\alpha \Delta P = \gamma$$

$$\alpha w = Q$$

→ Vérin

$$F_c = A \Delta P$$

$$Q = A \dot{x}$$

→ Charge

$$m \ddot{x} = F_c - mg$$

→ Potentiomètre

$$V_{pot} = V_{sup} x$$

Variables

V_o [volts]	γ [N.m]	ΔP [N/m ²]	F [N]
I [amp]	w [rad/sec]	Q [m ³ /sec]	$\dot{x}$ [m/sec]

FIGURE B.3 – Modélisation d'un monte charge hydraulique

Questions :

1. Faire un schéma blocs qui représente les équations du système
2. Simplifier les équations
3. Trouver le ou les pôles du système

E2.3 — Identification des paramètres électriques d'un moteur

Sujet : La réponse temporelle des systèmes d'ordre 1.

On désire identifier les caractéristiques électriques d'un moteur. On bloque sa sortie, on applique une tension de 12 volts et on mesure le signal de courant.

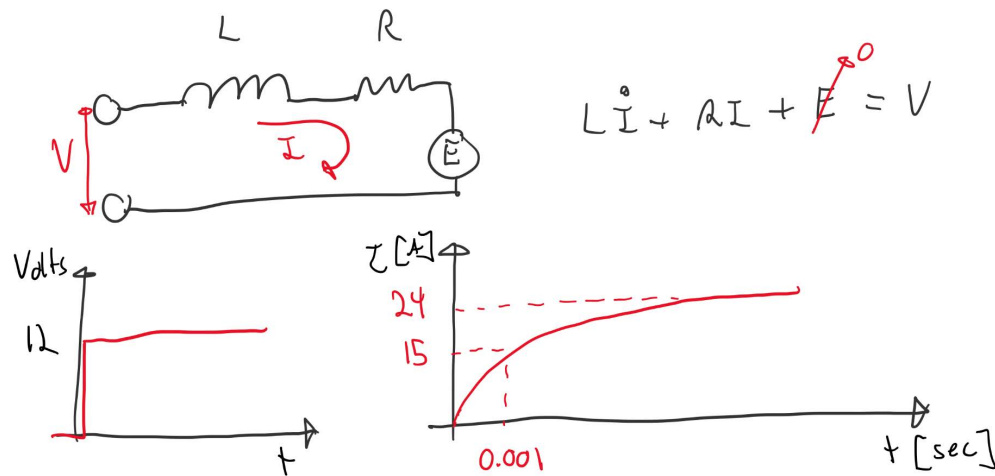


FIGURE B.4 – Identification des paramètres électriques d'un moteur

Questions :

1. Déterminez la fonction de transfert entre la tension V et le courant I ;
2. Quelle est la constante de cette fonction de transfert?
3. Quelle est le gain statique de cette fonction de transfert?
4. Quelle est la solution temporelle théorique $I(t)$ pour ce système;
5. Estimez les paramètres physiques L et R basé sur le graphique.

E2.4 — Identification de la dynamique d'un joint robotique

Sujet : La réponse temporelle des systèmes d'ordre 2.

On désire identifier les caractéristiques dynamique d'un joint robotique. Pour ce faire, une force de 1 Newton est appliquée à l'effecteur du robot et on mesure le mouvement résultant illustré à la figure B.5. Ici on peut considérer le robot comme un système masse-ressort-amortisseur. La masse représente l'inertie du lien rigide, l'amortisseur la dissipation dans les roulements, et le ressort la compliance dans la transmission à courroie.

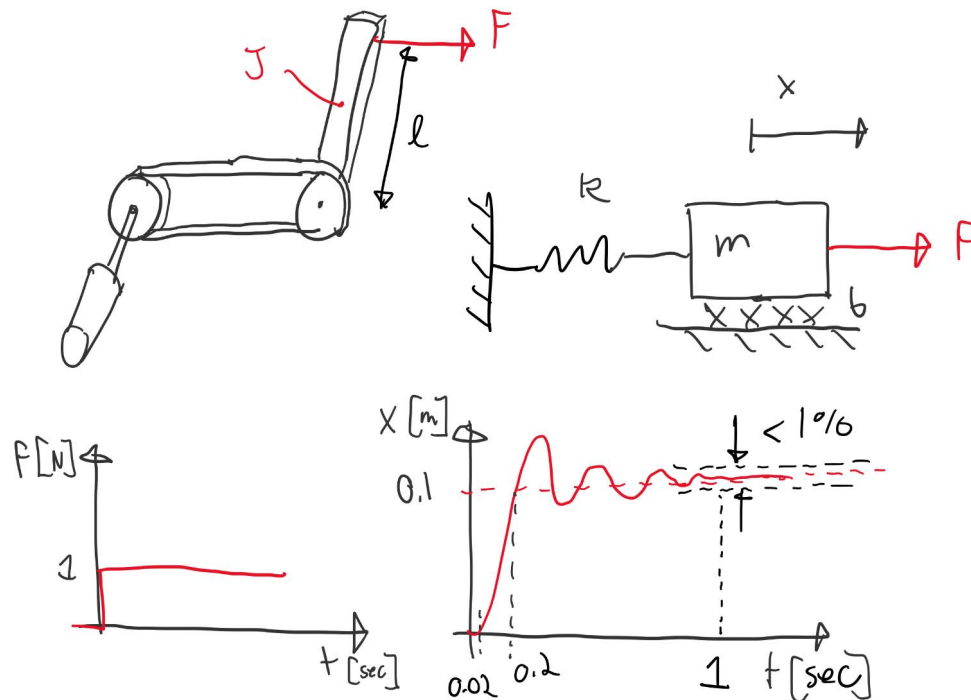


FIGURE B.5 – Identification du comportement dynamique d'un joint robotique

Note : Vous pouvez utiliser les approximations (règles du pouce) suivantes :

$$t_r \approx \frac{1.8}{w_n} \quad t_s \approx \frac{4.6}{\zeta w_n} \quad (\text{B.6})$$

Questions :

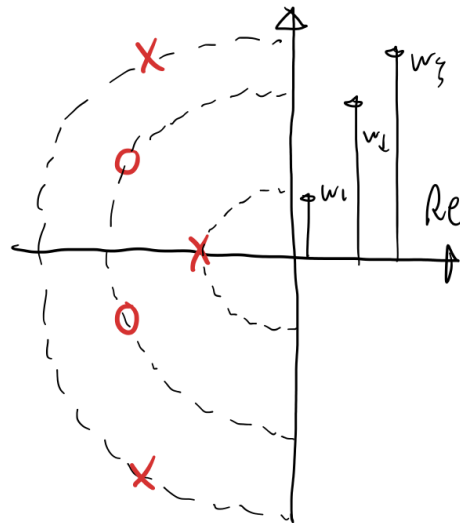
1. Déterminez la fonction de transfert entre la force f et la position x ;
2. Déterminez la relation entre les paramètres physiques m , k et b , et les paramètres w_n et ζ ;
3. Utilisez le théorème de la valeur finale pour calculer la position finale théorique;
4. Estimez les paramètres physiques m , k et b en comparant avec la réponse temporelle.

Chapitre 3

E3.2 — Approximation de la réponse fréquentielle

Tracez une approximation à la main du diagramme de Bode de la fonction de transfert :

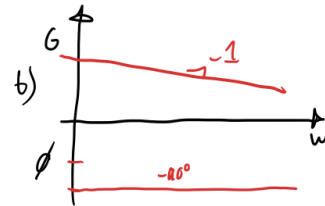
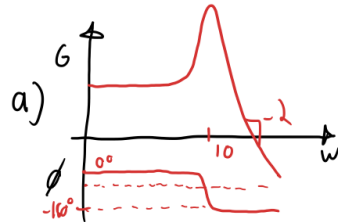
$$H(s) = g_0 \frac{\frac{s^2}{w_2^2} + \frac{2\zeta s}{w_2} + 1}{\left(\frac{s}{w_1} + 1\right)\left(\frac{s^2}{w_3^2} + \frac{2\zeta s}{w_3} + 1\right)}$$



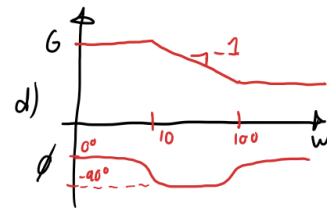
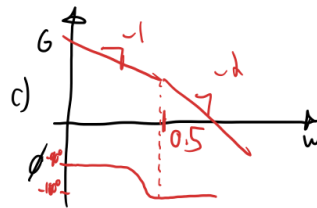
E3.3 — Association de fonctions de transfert à leur réponse fréquentielle

Associez les fonctions de transfert à la bonne réponse fréquentielle dans le choix de réponses.

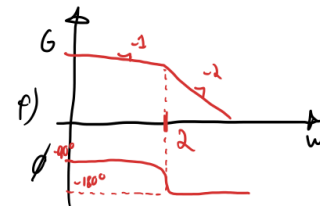
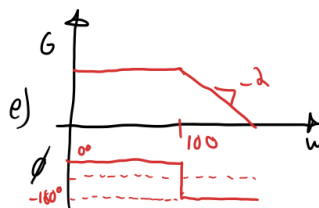
1. $H_1(s) = \frac{1}{s(s+2)}$



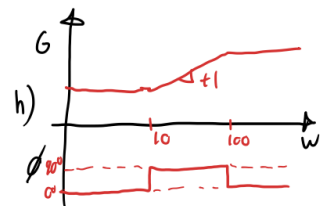
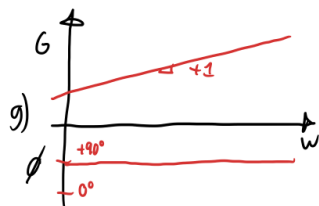
2. $H_2(s) = 10s$



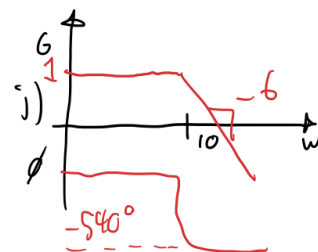
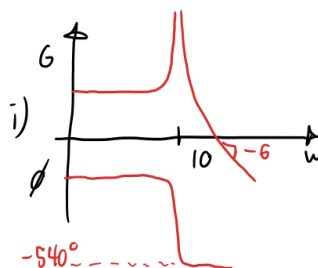
3. $H_3(s) = \frac{1}{s^2 + 0.01s + 100}$



4. $H_4(s) = \frac{s+100}{s+10}$



5. $H_5(s) = \frac{1}{s^6 + 10^6}$



Chapitre 4

E3.1 — Analyse des boucles fermées

Pour les combinaisons de contrôleur $C(s)$ et systèmes $H(s)$ suivantes :

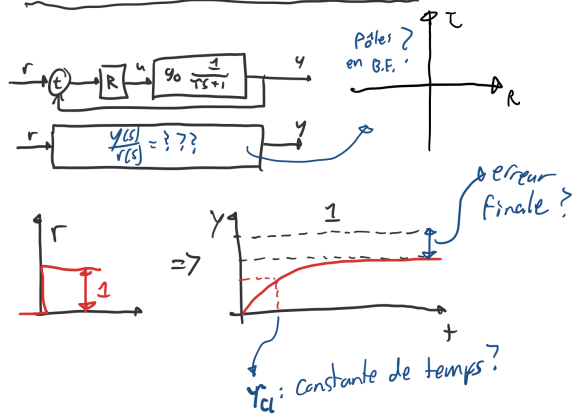
$$\begin{array}{ll}
 C(s) = k & H(s) = g_0 \frac{1}{\tau s + 1} \\
 C(s) = k & H(s) = \frac{g_0}{s^2} \\
 C(s) = k_p + k_d s & H(s) = \frac{g_0}{s^2} \\
 C(s) = k & H(s) = g_0 \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \\
 C(s) = k_p + k_d s & H(s) = g_0 \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}
 \end{array}$$

Déterminez :

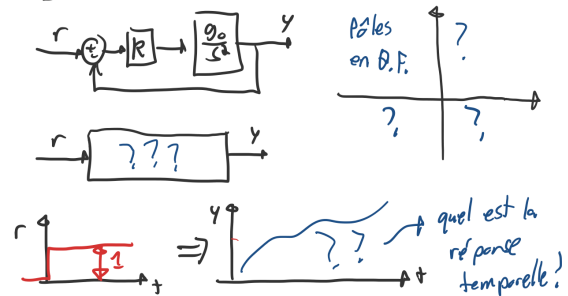
1. La fonction de transfert en boucle fermée $\frac{y(s)}{r(s)}$ et les pôles de cette fonction ;
2. La réponse temporelle $y(t)$ pour un signal $r(t)$ de type step, incluant les paramètres de la réponse transitoire et l'erreur finale.

Voir les figures suivantes pour vous guider.

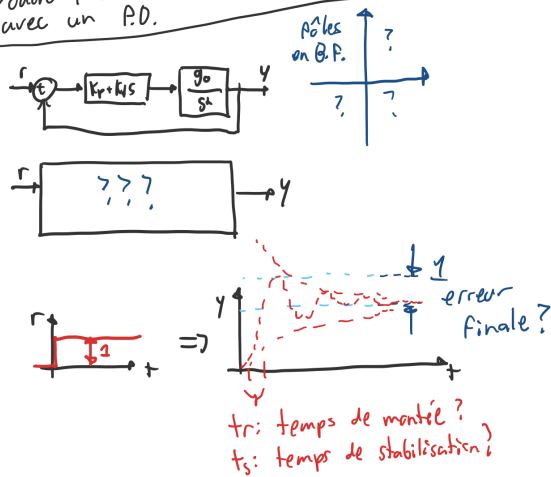
Boucle fermée d'un système d'ordre 1



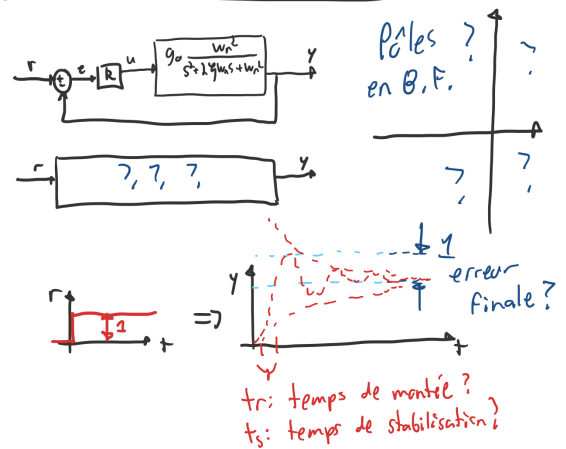
Boucle fermée d'un double intégrateur



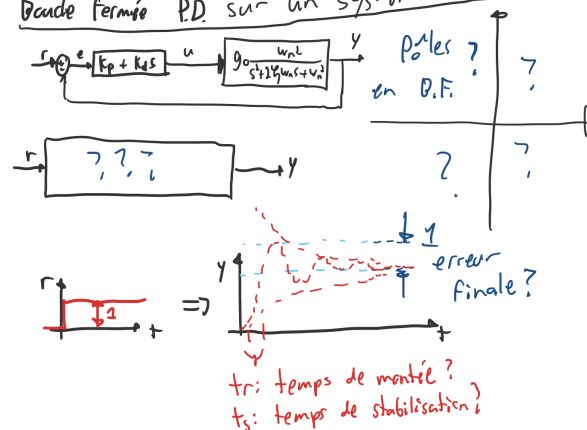
Boucle fermée d'un double intégrateur avec un P.D.



Boucle fermée P. sur un ordre 2

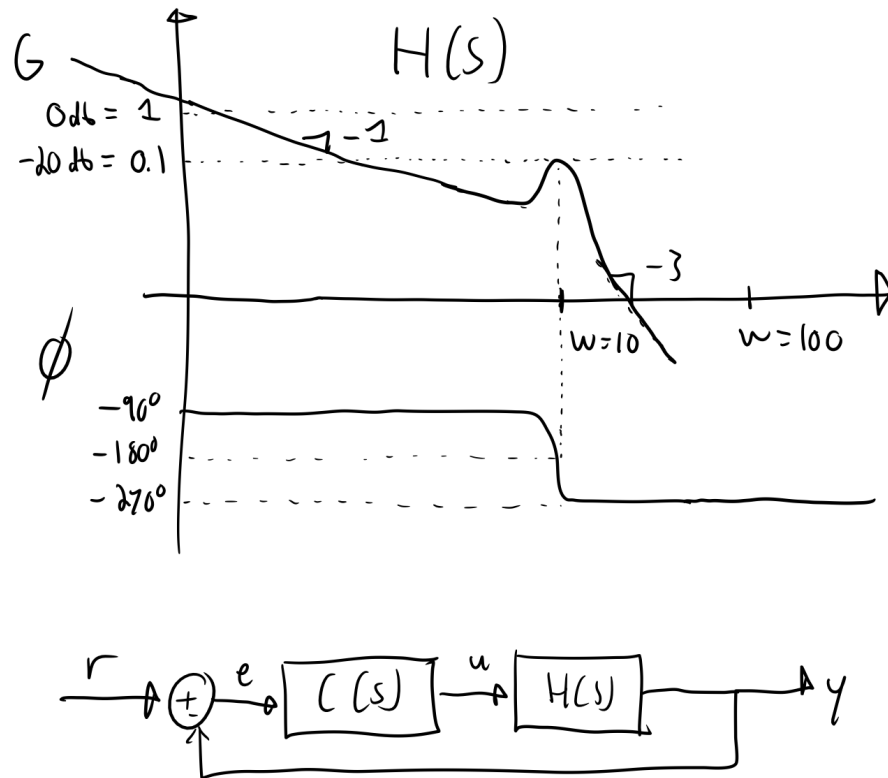


Boucle fermée P.D. sur un système d'ordre 2



E3.4 — Marge de phase

Pour le système asservis suivant :



Quelle est la marge de phase ?

Pour quels gains le système est-il instable :

$$C(s) = 1$$

$$C(s) = 5$$

$$C(s) = 50$$

$$C(s) = 500$$

E4.1 — Analyse du lieu des racines

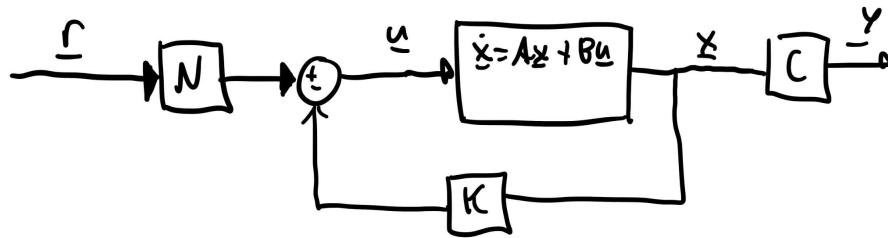
Tracez le lieu des racines pour les systèmes suivantes :

$$\begin{array}{ll} C(s) = k & H(s) = \frac{1}{s^3} \\ C(s) = k_p + k_d s & H(s) = \frac{1}{ms^2} \\ C(s) = \frac{k_i}{s} & H(s) = \frac{10}{s + 10} \\ C(s) = \frac{k_i}{s} & H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \\ C(s) = k_p + k_d s + \frac{k_i}{s} & H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \end{array}$$

Chapitre 5

E5.1 — Boucle fermée multi-variable

Pour la boucle multi-variable suivante :



Questions :

1. Déterminez les matrices caractéristiques de la dynamique en boucle fermée, i.e. A_{cl} et B_{cl} dans l'équation $\dot{x} = A_{cl}x + B_{cl}r$
2. Quelle équation permet de calculer les pôles de la boucle fermée ?
3. Quelle valeur doit prendre la matrice N pour avoir $y = r$ en régime permanent ?

E5.2 — Loi de commande optimale

Pour le système scalaire :

$$\dot{x} = ax + bu$$

avec comme loi de commande :

$$u = -kx$$

déterminer le gain k qui minimise la fonction de coût suivante :

$$J = \int_0^{\infty} (qx^2 + ru^2)dt$$

Quelle équation il faut résoudre numériquement pour la forme générique de ce problème ?

E5.3 — Observabilité/contrôlabilité

Pour la fonction de transfert suivante :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+1}{s^2+3s+2}$$

Questions :

1. Quel sont les zéros et les pôles ?
2. Trouver la représentation d'état équivalente ? Est-ce qu'elle est unique ?
3. Est-ce que le système est contrôlable et observable ?

C5.1 — Tutoriel NumPy

Suivez le tutoriel suivant pour comprendre les commandes de base utiles :



Exercice de code

Commande Multi-variable linéaire avec NumPy

<https://drive.google.com/file/d/1463MyQZwUdtq1Cxjhz21zhDbDTV-dJ9m/view?usp=sharing>

C5.3 — Chariot-pendulum-inversé avec la méthode LQR

On va asservir le système suivant Les équations non-linéaires du système sont :

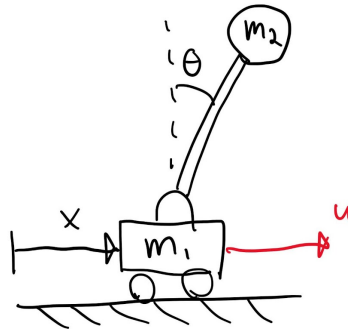


FIGURE B.6 – Chariot et pendule

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 l \cos(\theta) \\ m_2 l \cos(\theta) & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m_2 l \sin(\theta) \dot{\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g l \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Les équations linéarisées (autour de $\theta = 0$) du système sont :

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} = u \quad (\text{B.8})$$

$$m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\theta} - m_2 g l \theta = 0 \quad (\text{B.9})$$

Questions :

- Déterminez les matrices A,B,C,D pour ce système
- Utiliser la méthode placement de pôles pour synthétiser une matrice de gains
- Utiliser la méthode LQR pour synthétiser une matrice de gain optimale
- Testez vos lois de commande avec une simulation qui utilise les équations non-linéaires
- Testez pour diverses conditions initiales

Vous pouvez utiliser le code d'amorce suivant :



Exercice de code

Cart-pole with custom static controller

<https://colab.research.google.com/drive/1pGOr3tAwQHNYvsNhL3q4Q3rFu91YpqtM?usp=sharing>

C5.4 — Chariot-pendulum-inversé avec la méthode LQG

Maintenant on veut inclure dans la simulation du bruit pour être plus réaliste, et un filtre de Kalman pour estimer les états à partir de signaux bruités :

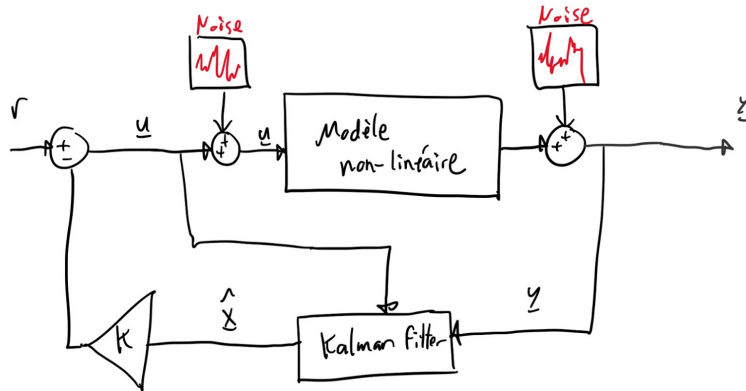


FIGURE B.7 – Schéma bloc pour valider le fonctionnement de l'observateur

Questions :

- Testez vos lois de commande, quand on inclut du bruit et un filtre de Kalman
- Testez plusieurs conditions de bruit
- Testez plusieurs versions du filtre de Kalman en ajustant les matrices Q_n et R_n

Vous pouvez utiliser le code d'amorce suivant :



Exercice de code

Cart-pole with custom dynamic controller

https://colab.research.google.com/drive/1XIPzioEK6IvTG_mL_DR2-XFnSnizZq-U?usp=sharing

Bibliographie

- [1] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. *Modern Control Systems*. Pearson, 2017. URL : <https://www.pearson.com/en-us/subject-catalog/p/modern-control-systems/P2000000003484/9780137307098>.
- [2] Karl J. Åström and Richard M. Murray. *Feedback Systems : An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, 2021. URL : https://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki/Second_Edition.html.